数理解析研究所講究録
1499巻 2006年 153-158

コンタクトプロセスとその応用

独立行政法人科学技術振興機構 ERATO 合原複雑数理モデルプロジェクト
杉峰 伸明 (Nobuaki Sugimine)
Aihara Complexity Modelling Project, ERATO, JST

本稿では, (無限粒子系における) グラフ表現を用いた解析例のひとつを紹介しつつ, コンタクトプロセス [1, 2, 3, 4, 5], 多種型コンタクトプロセス [6] について概説する. コンタクトプロセスは $\mathbb{Z}^d$-格子上の各頂点が $\{0,1\}$ のどちらかの値を, 多種型コンタクトプロセスは $\mathbb{Z}^d$-格子上の各頂点が $\{0,1,2\}$ のどれかの値をとるマルコフ過程 $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ である. ここで, $\mathbb{Z}^d$-格子とは,

$$\begin{cases} \text{頂点集合:} & \{(x_1,\ldots,x_d) : \text{各 } x_i \text{ は整数}\} \\ \text{隣接関係:} & x \sim y \Leftrightarrow |x_1-y_1|+\cdots+|x_d-y_d|=1 \end{cases}$$

をもつグラフのことである. グラフ表現は, $\mathbb{Z}^d$-格子に限らず一般のグラフ上で用いることが可能で, [7] ではツリー上の拡張型コンタクトプロセスに対して用いられている.

コンタクトプロセス (CP) の遷移ルールは次で与えられる: 頂点 x に隣接する状態 1 の頂点数を $n_1(x)$ で表すと, 頂点 x での状態遷移は,

$$\begin{cases} 0\to 1 & \text{遷移率 } \lambda n_1(x) \\ 1\to 0 & \text{遷移率 } 1 \end{cases} \tag{1}$$

となる. ただし, $\lambda \geq 0$ である. (1) より, 一旦全ての頂点が状態 0 になると, それ以後どの頂点も状態 1 に遷移することはなく状態遷移が起こらなくなる. 平均場近似によって $I(t)=\mathcal{P}(\eta_t(x)=1)$ が従う方程式を導出すると (現在の所, 閉じた方程式系は発見されていない),

$$I'(t) = -I(t) + 2d\lambda\{1-I(t)\}I(t) \tag{2}$$

となる. (2) が一定人口下での SIS モデルであることより, コンタクトプロセスが, 状態 0 ならば感染受容者, 状態 1 ならば感染者とした伝染病モデルとなっていることが覗える.

多種型コンタクトプロセス (MCP) の遷移ルールは次で与えられる: 頂点 x に隣接する状態 1 の頂点数を $n_1(x)$ で, 状態 2 の頂点数を $n_2(x)$ で表すと, 頂点 x での状態遷移は,

$$\begin{cases} 0\to 1 & \text{at rate } \lambda_1 n_1(x) \\ 1\to 0 & \text{at rate } 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\to 2 & \text{at rate } \lambda_2 n_2(x) \\ 2\to 0 & \text{at rate } 1 \end{cases} \tag{3}$$

となる. ただし, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ である.

$$\begin{cases} I_1'(t) = -I_1(t) + 2d\lambda_1\{1-I_1(t)-I_2(t)\}I_1(t) \\ I_2'(t) = -I_2(t) + 2d\lambda_2\{1-I_1(t)-I_2(t)\}I_2(t) \end{cases} \tag{4}$$

は, $I_i(t)=\mathcal{P}(\eta_t(x)=i)$ が従う方程式を平均場近似によって導出したものである.

目標. $\lambda_1=\lambda_2>\lambda_c(\mathrm{CP})$ とすると, (4) は共存可能であるのに対して, (3) は $d\geq 3$ ならば共存可能だが $d=1,2$ では共存不可能となる. このことは, グラフ表現を介した解析がランダム・ウォークの再帰性に帰着されることに依るが [6], それを概説することが本稿の目標である. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のときは, (4) と同様に (3) でも次元によらず共存不可能である.

まず, コンタクトプロセスについて説明する.

グラフ表現 (CP). 各頂点 x に, 事象が起こる時刻を知らせる鐘の役割をもつ独立なポアソン過程 $\{D^x; E^{xy}, y\sim x\}$ をおく. ここで, D^x は割合 1 の, E^{xy} は割合 λ のポアソン過程である. 時刻 t において D^x が鳴ると, $\eta_t(x)=0$ となる. 時刻 t において E^{xy} が鳴ると, $\eta_{t-}(x)=1$ ならば $\eta_{t-}(y)$ に依らず $\eta_t(x)=\eta_t(y)=1$ となる. $\eta_{t-}(x)=0$ ならば何も変化しない. $(x,t)\in\mathbb{Z}^d\times[0,\infty)$ に, 時刻 t で D^x が鳴れば recovery symbol($\times$) を, E^{xy} が鳴れば x から y への infection arrow($\to$) をおく. 時間列 $\{t_i\}_{i=0}^{n+1}$ を, $t_0=s$, $t_{n+1}=s'$ であって, 各 i に対して $t_i<t_{i+1}$ となるようにとる. 時刻と頂点が交互に現れる列 $(t_0,x_0,t_1,x_1,\dots,t_n,x_n,t_{n+1})$ が以下の条件をみたすとき, この列を (x_0,s) から (x_n,s') への active path と呼ぶ (図 1):

(i) 全ての i に対して, $\{x_i\}\times[t_i,t_{i+1}]$ 内に recovery symbol が現れない.
(ii) 全ての i に対して, 時刻 t_i に x_{i-1} から x_i への infection arrow が現れる.
(iii) 全ての i に対して, $\eta_{t_i-}(x_{i-1})=1$ である.

時刻 t で状態 1 である頂点の集合を Λ_t とする. すなわち, $\Lambda_t=\{x\in\mathbb{Z}^d:\eta_t(x)=1\}$ である. 初期条件をもつときには, Λ_t^A と書く ($A=\{x\in\mathbb{Z}^d:\xi(x)=1\}$, $\mathcal{P}(\eta_0\equiv\xi)=1$). λ を明示するときには, $\Lambda_{\lambda,t}$ などと書く. このとき,

$$\{y\in\mathbb{Z}^d: \text{ある } x\in A \text{ に対して, } (x,0) \text{ から } (y,t) \text{ への active path がある }\}$$

は $\{\Lambda_t^A\}_{t\geq 0}$ と同分布である. グラフ表現の利点に, A,λ に関する単調性が自明に従うことがある:

$$A\subset B\Rightarrow\mathcal{P}(\Lambda_t^A\subset\Lambda_t^B,\ \forall t>0)=1,\quad \lambda\leq\lambda'\Rightarrow\mathcal{P}(\Lambda_{\lambda,t}\subset\Lambda_{\lambda',t},\ \forall t>0)=1. \tag{5}$$

自己双対性 (CP). 時刻 t までのグラフ表現において, infection arrow を逆向きにして時刻 t から時刻 0 まで (逆向き)active path を辿っても得られる分布は同じである. つまり,

$$\{x\in\mathbb{Z}^d: \text{ある } y\in B \text{ に対して, } (y,t) \text{ から } (x,0) \text{ への (逆向き)active path がある }\}$$

も $\{\Lambda_t^B\}_{t\geq 0}$ と同分布である. さらに, 時刻 0 に A のどれかの頂点から active path を辿り時刻 t に B のどこかの頂点に辿りつけば, 時刻 t に B のどれかの頂点から (逆向き)active path を辿り時刻 0 に A のどこかの頂点に辿りつくので, 自己双対性と呼ばれる以下の性質が成り立つ:

$$\mathcal{P}(\Lambda_t^A\cap B\neq\emptyset)=\mathcal{P}(\Lambda_t^B\cap A\neq\emptyset)\quad(\forall A,B\subset\mathbb{Z}^d). \tag{6}$$

$\Lambda_s=\emptyset$ ならば $\Lambda_t=\emptyset$ $(\forall t\geq s)$ に注意して, (6) において $B=\mathbb{Z}^d$ とすると,

$$\mathcal{P}(\Lambda_t^A\neq\emptyset,\ \forall t\geq 0)=\lim_{t\to\infty}\mathcal{P}(\Lambda_t^A\cap\mathbb{Z}^d\neq\emptyset)=\lim_{t\to\infty}\mathcal{P}(\Lambda_t^{\mathbb{Z}^d}\cap A\neq\emptyset)=\overline{\nu}(\{B:B\cap A\neq\emptyset\}) \tag{7}$$

を得る. ここで, $\Lambda_t^{\mathbb{Z}^d}$ がある定常分布 $\overline{\nu}$ に収束することは, (5) の単調性とマルコフ性より従う.

臨界値 (CP). 臨界値と呼ばれる以下をみたす値 λ_c ($\lambda_c^{(d)}$, λ_c(CP) とも書く) が存在する:

$$\lambda\leq\lambda_c\Rightarrow\mathcal{P}(\Lambda_{\lambda,t}^{\{O\}}\neq\emptyset,\ \forall t\geq 0)=0,\quad \lambda>\lambda_c\Rightarrow\mathcal{P}(\Lambda_{\lambda,t}^{\{O\}}\neq\emptyset,\ \forall t\geq 0)>0.$$

伝染病モデルとしては, $\lambda\leq\lambda_c$ ならば伝染病が撲滅され, $\lambda>\lambda_c$ ならば伝染病が持続する可能性があることを意味している. (2) の閾値が $1/(2d)$ である一方,

$$\frac{1}{2d-1}\leq\lambda_c^{(d)}\leq\frac{2}{d}\quad(\forall d\geq 1),\quad \lim_{d\to\infty}2d\lambda_c^{(d)}=1$$

などが知られている.

完全収束定理 (CP). $\delta_\emptyset$ を $\delta_\emptyset(\emptyset)=1$ である分布とする. また $\alpha_A = \mathcal{P}(\Lambda_t^A \neq \emptyset,\ \forall t \geq 0)$ と書く. このとき, 任意の $A \subset \mathbb{Z}^d$ に対して,

$$\Lambda_t^A \Rightarrow \alpha_A \overline{\nu} + (1-\alpha_A)\delta_\emptyset \quad (\text{分布の弱収束})$$

となる. ただし, $\lambda \leq \lambda_c$ ならば $\overline{\nu} = \delta_\emptyset$ であって, $\lambda > \lambda_c$ ならば $\overline{\nu} \neq \delta_\emptyset$(特に, $\overline{\nu}(\emptyset) = 0$) である.

(無限系) 絶滅時刻 (CP). $\lambda > \lambda_c$ とする. $A \subset \mathbb{Z}^d$ 上の頂点では状態 1, その他では状態 0 を初期状態として, 全ての頂点が状態 0 になる最初の時刻を

$$\tau^A = \inf\{t > 0 : \Lambda_t^A = \emptyset\}$$

とすると,

$$\mathcal{P}(t < \tau^A < \infty) \leq Ce^{-\varepsilon t}, \quad \mathcal{P}(\tau^A < \infty) \leq Ce^{-\varepsilon|A|} \tag{8}$$

である. ただし, C と ε は A と t に無関係な正の定数である.

(有限系) 絶滅時刻 (CP). $\{1,\ldots,N\}^d$ 上に制限したコンタクトプロセス $\Lambda_{N,t}$ を考え, 全ての頂点で状態 1 を初期状態として, 全ての頂点が状態 0 になる最初の時刻を

$$\tau_N = \inf\{t > 0 : \Lambda_{N,t}^{\{1,\ldots,N\}^d} = \emptyset\}$$

とする. このとき,

$$\lambda < \lambda_c \Rightarrow \tau_N \approx \log N, \quad \lambda > \lambda_c \Rightarrow \tau_N \approx \exp(N^d) \tag{9}$$

である (正確で詳しいことは [5] を参照して頂きたい).

次に, 多種型コンタクトプロセスについて説明する.

グラフ表現 (MCP). 各頂点 x に, 独立なポアソン過程 $\{D^x; E_1^{xy}, E_2^{xy}, y \sim x\}$ をおく. ただし, D^x は割合 1 の, E_i^{xy} は割合 λ_i のポアソン過程である. 時刻 t において D^x が鳴ると, $\eta_t(x) = 0$ となる. 時刻 t において E_i^{xy} が鳴ると, $\eta_{t-}(x) = i,\ \eta_{t-}(y) = 0$ ならば $\eta_t(x) = \eta_t(y) = i$ となる. それ以外ならば何も変化しない.

以後, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ とする. コンタクトプロセスとの比較から, $\lambda \leq \lambda_c$(CP) ならば初期状態に依らず, 全ての頂点が状態 0 という状態に収束することが分かるので, $\lambda > \lambda_c$(CP) とする.

第一祖先 (MCP($\lambda_1 = \lambda_2$)). E^{xy} は割合 λ のポアソン過程とする. E_1^{xy} と E_2^{xy} は同分布なので, (強マルコフ性より)$\{D^x; E^{xy}, y \sim x\}$ だけを用意し, 時刻 t において E^{xy} が鳴ると, $\eta_{t-}(x) = i,\ \eta_{t-}(y) = 0$ ならば $\eta_t(x) = \eta_t(y) = i$ となるとしてもよい. 状態1も2もコンタクトプロセスと同様に振る舞うが, E^{xy} が鳴ったとしても, 例えば, $\eta_{t-}(x) = 1,\ \eta_{t-}(y) = 2$ ならば $\eta_t(x) = 1,\ \eta_t(y) = 2$ のままなので, active path の扱いに注意が必要である. なぜなら, $\eta_0(x) = i$ であって $(x,0)$ から (y,t) に active path があったとしても, $\eta_t(y) = i$ とは限らないからである. 問題となるのは, $\eta_0(x) = 1,\ \eta_0(x') = 2$ であって, $(x,0)$ と $(x',0)$ の両方から (y,t) に active path があるときに, $\eta_t(y) = 1$ か $\eta_t(y) = 2$ のどちらになるのか?である.

(y,t) から symbol($\times$) を避けて (逆向き)active path を辿る. このとき, (y,t) から辿りつける $(x,0)$ に対して, (逆向き)arrow に遭遇する度にそれを優先的に通って辿りつける頂点の順に, $\{x_k\}_{k=1}^K$

と大きい番号を付ける．この頂点 $x_1, \ldots, x_K$ を祖先と呼ぶ (図 2)．特に，x_1 を第一祖先と呼び，$f_y(t)$ と書く (y を省略することもある)．$i_k \in \{1,2\}$ とする．$\eta_0(x_1) = i_1$ ならば $\eta_t(y) = i_1$ で，$\eta_0(x_1) = 0$, $\eta_0(x_2) = i_2$ ならば $\eta_t(y) = i_2$ で，$\eta_0(x_1) = \eta_0(x_2) = 0$, $\eta_0(x_3) = i_3$ ならば $\eta_t(y) = i_3$ で，$\ldots$，$\eta_0(x_1) = \cdots = \eta_0(x_K) = 0$ ならば $\eta_t(y) = 0$ である．従って特に，y と y' の第一祖先が共通に $f(t) = x$ であって $\eta_0(x) \neq 0$ であれば，$\eta_t(y) = \eta_t(y')$ である．コンタクトプロセスと同様に自己双対的であるので，$(y,0)$ から辿りつける (x,t) に対して第一祖先 $f_y(t)$ を定めても，その分布は等しい．そこで順時間方向に追いながら，$f(t)$ の時間発展を調べてみよう．そのとき鍵になるのが，次に述べる更新点である．

更新点 (MCP($\lambda_1 = \lambda_2$)). ちょうど時刻 s から s' で x が y の第一祖先とする:

$$f_y(s-) \neq x, \quad f_y(t) = x \quad (\forall t \in [s,s')), \quad f_y(s') = x' \neq x.$$

このとき，時刻 s 以降で初めて時刻 s' で鐘 D^x が鳴った (symbol× に遭遇した) ことになる．では，x' とはどのような頂点であろうか．$(s,s']$ に頂点 x から出た arrow を通って枝分かれした active path で時刻 s' まで伸びるものがあれば，常に一番遅くに枝分かれするものを通ると x' に辿りつくことになる．なければ，$(y,0)$ から (x,s) までの active path の途中で枝分かれした時刻 s' まで辿れる active path の中で，常に一番遅くに枝分かれするものを通ると x' に辿りつくことになる．

$(y,0)$ から時刻 ∞ までの active path があるとする．$T_0 = 0$ とする．時刻 T_0 以降で初めて $D^{f(T_0)}$ が鳴った時刻を T_0' とする ($y = f(T_0) \neq f(T_0')$)．そして，時刻 T_0' 以降で初めて，第一祖先が時刻 ∞ までの active path 上にジャンプする時刻を T_1 とする．このとき，$T_1 = T_0'$ となることもある．再び，時刻 T_1 以降で初めて $D^{f(T_1)}$ が鳴った時刻を T_1' として，時刻 T_1' 以降で初めて第一祖先が時刻 ∞ までの active path 上にジャンプする時刻を T_2 とする．以下同様に $T_2', T_3, T_3', \ldots$ と定め，$f(T_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ を更新点と呼ぶ (図 3)．

ランダム・ウォーク (MCP($\lambda_1 = \lambda_2$)). $\Omega_{(y,t)} = \{(y,t)$ から時刻 ∞ までの active path がある $\}$ として，(y,t) を明記しないときには Ω_∞ と書き，$\mathcal{P}_{\Omega_\infty}(\cdot) = \mathcal{P}(\cdot \mid \Omega_\infty)$ とする．$\lambda > \lambda_c$ より $\mathcal{P}(\Omega_\infty) > 0$ である．$r(t)$ を

$$r(t) = f(T_{i-1}), \quad \forall t \in [T_{i-1}, T_i) \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

と定めると，(グラフ表現に用いる) ポアソン過程の強マルコフ性より $r(t)$ は $\mathcal{P}_{\Omega_\infty}$ の下で (連続時間) ランダム・ウォークとなる．さらに，以下の性質をもっていることが分かる: ある正定数 C と γ に対して，

$$\text{(10)} \qquad \mathcal{P}_{\Omega_\infty}(\|f(T_i) - f(T_{i-1})\| > u) \leq Ce^{-\gamma u}, \quad \mathcal{P}_{\Omega_\infty}(T_i - T_{i-1} > t) \leq Ce^{-\gamma t} \quad (\forall i \in \mathbb{N}).$$

以下これを概説しよう．$\tau_i = T_i - T_{i-1}$ とおくと，$\mathcal{P}_{\Omega_\infty}$ の下で $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は独立同分布となるので，τ_1 についてだけ説明する．$(T_0, T_1]$ に，第一祖先自体は何回かジャンプしている可能性があるが，そのときは有限時刻までしか続かない active path を辿っていることになる．特に最初のジャンプは時刻 T_0' に起こり，

$$\text{(11)} \qquad \mathcal{P}(T_0' - T_0 > t; \Omega_\infty) \leq e^{-t}$$

である．$T_0' < T_1$ ならば，その後何回かのジャンプを経て $(f(T_0'), T_0')$ からの active path では辿りつけない頂点にジャンプするので，その時刻を σ_1 とする．同様にして，$\sigma_k < T_1$ $(k \geq 1)$ なら

ば, $(f(\sigma_k),\sigma_k)$ からの active path では辿りつけない頂点にジャンプする時刻を σ_{k+1} とする. いま $(T_0,T_1]$ に第一祖先がそのようなジャンプを K 回している $(\sigma_K=T_1)$ とすると, (8) より

$$\mathcal{P}(t<\sigma_k-\sigma_{k-1}<\infty)\le Ce^{-\gamma t}\quad(1\le\forall k\le K) \tag{12}$$

である. ただし, $\sigma_0=T_0'$ と定める. また, K は幾何分布に従う. $\psi(\kappa)=\mathbb{E}\kappa^K$ と $\phi(\theta)=\mathbb{E}[e^{\theta(\sigma_1-\sigma_0)}\mid K\neq 0]$ とすると, (11) と (12) より

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\theta\tau_1};\tau_1<\infty\right]&=\mathbb{E}\left[e^{\theta(\sigma_0-T_0)};K=0,\ \tau_1<\infty\right]+\mathbb{E}\left[e^{\theta(\sigma_0-T_0)}e^{\theta\sum_{k=1}^{K}(\sigma_k-\sigma_{k-1})};K\neq 0\right]\\&\le\frac{1}{1-\theta}\Big(1+\psi(\phi(\theta))\Big)<\infty\end{aligned}$$

となるので, $e^{\theta t}\mathcal{P}(\Omega_\infty)\mathcal{P}_{\Omega_\infty}(\tau_1>t)\le\mathbb{E}[e^{\theta\tau_1};\tau_1<\infty]$ と合わせて, (10) の第二式を得る. 第一式は, グラフ表現と第二式を用いた議論により証明される.

目標の証明の戦略 (MCP($\lambda_1=\lambda_2$)).

$\widetilde{r}_x(t),\widetilde{r}_y(t)$ $(x\neq y)$ を, 独立でそれぞれ $r_x(t),r_y(t)$ と同分布とする. (10) より $\widetilde{r}_x(t)$ と $\widetilde{r}_y(t)$ $(x\neq y)$ については, $d=1,2$ ならば確率 1 で (無限回) ぶつかり, $d\ge 3$ ならば確率正でぶつからない. 相関がある $r_x(t)$ と $r_y(t)$ ではさらに議論が必要であるが, $r_x(t)$ と $r_y(t)$ についても同様のことが成り立つ.

$d=1,2$ とする. いま時刻 t で $r_x(t)$ がジャンプし $r_y(t)$ にぶつかったとして, $f_x(t)=r_x(t)=r_y(t)=x'$ とする. このとき, $f_y(t)=r_y(t)$ ならば, (x',t) から ∞ までの active path があることより, $f_x(s)=f_y(s)$ $(\forall s\ge t)$ である. しかし一般には, $f_y(t)=r_y(t)$ とはならない. しかるに (10) などより, $[t,t+1]$ の間 $D^{x'},E^{x'z}$ ($\forall z$ は x の近傍) が鳴らず, ある時刻 $t'\in(t,t+1]$ において $f_y(t')=x'$ となる確率は, (x',t) などに依らず一様に正であることが示される. この事象が起こると $f_x(s)=f_y(s)$ $(\forall s\ge t')$ となることに注意すると, $r_x(t)$ と $r_y(t)$ が確率 1 で無限回ぶつかることと合わせて, ある時刻以降 $f_x=f_y$ を得る (図 4). 従って, x と y の状態は確率 1 で同じである.

$d\ge 3$ とする. $r_x(t)$ と $r_y(t)$ がぶつからない確率が正であるので, $f_x\neq f_y$ となる確率も正である. 従って, x と y は異なる状態をとることがある.

参考文献

[1] R. Durrett, Lecture Notes on Particle Systems and Percolation, Wadsworth, Inc., California, 1988.

[2] T.E. Harris, Ann. Probab., **2** (1974) 969–988.

[3] 今野紀雄, コンタクト・プロセスの相転移現象－相関不等式法とハリスの補題法－, 横浜図書, 2002.

[4] T.M. Liggett, Interacting Particle Systems, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985.

[5] T.M. Liggett, Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999.

[6] C. Neuhauser, Probab. Theory Related Fields, **91** (1992) 467–506.

[7] N. Sugimine, N. Masuda, N. Konno, K. Aihara, On global and local critical points of extended contact processes on homogeneous trees.

全ての図において, 横軸は頂点集合 ($\mathbb{Z}^1$) を表し, 縦軸は時間軸である.

図 1: ● が状態 1 の頂点

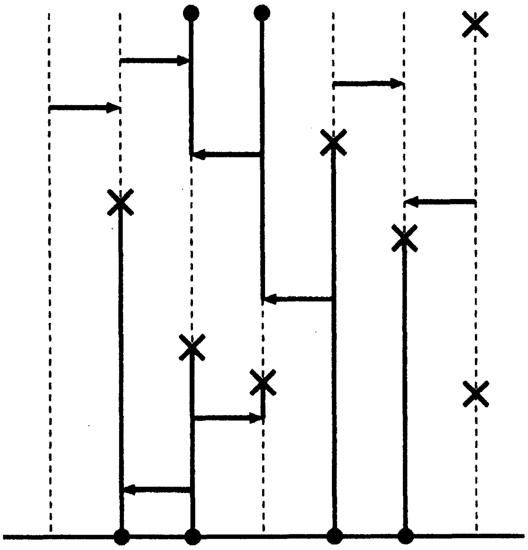

図 2: I~IV の頂点が祖先

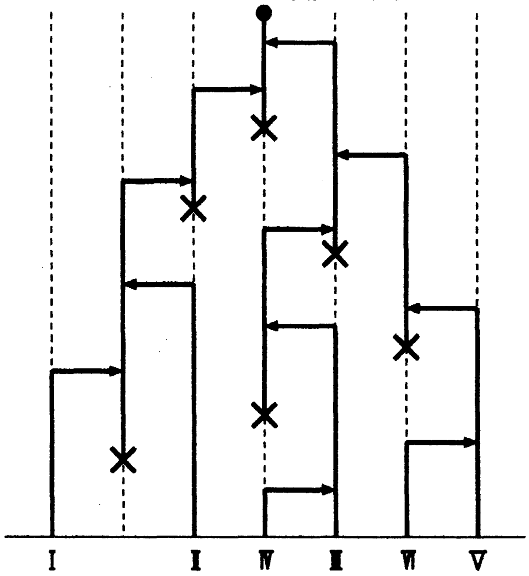

図 3: 太線が第一祖先の経路で, ○ が更新点

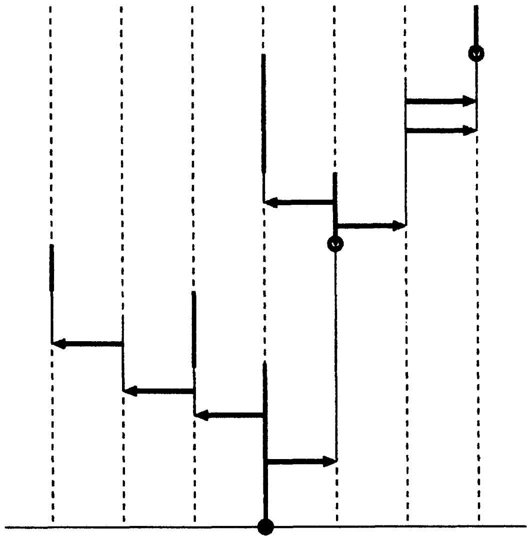

図 4: 更新点が一致し, 同一経路を辿る